УДК 519.2

УСТОЙЧИВОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ОДНОВРЕМЕННОГО ТРЕНДА СРЕДНЕГО И ДИСПЕРСИИ СЛУЧАЙНОГО СИГНАЛА

А.В. Китаева

Томский политехнический университет
E-mail: kit1157@yandex.ru

Рассматриваются параметрические робастные оценки одновременного тренда среднего и дисперсии случайного процесса, построенные по дискретным независимым наблюдениям, аналогичные по структуре оценкам квартилей распределений. Квартили распределения шумов предполагаются фиксированными. Показана сильная состоятельность и асимптотическая нормальность предложенных оценок.

Ключевые слова:
Робастное оценивание, временные ряды, тренды среднего и дисперсии, сходимость почти наверное, асимптотическая нормальность.

Введение

Классические статистические процедуры дают хорошие результаты, как правило, в случае нормального распределения шумов. Если же распределение помех наблюдений имеет «тяжелые хвосты», например, $F(x)\sim e^{-|x|}$, или представляет собой смесь распределений, к примеру, гауссовских, $F(x)=(1-\varepsilon)N(0,\sigma_1^2)+\varepsilon N(0,\sigma_2^2)$, $\varepsilon<<1$, $\sigma_1^2<<\sigma_2^2$, где второе распределение вносит «аномальные» помехи, то их эффективность может быть очень низка. Устойчивые (или робастные) статистические методы сохраняют работоспособность для достаточно широкого класса распределений и менее подвержены влиянию «аномальных» ошибок наблюдений. Основы современной теории робастности были заложены в 60-х годах прошлого века [1]. В настоящее время робастные методы находят широкое применение в самых разнообразных областях не только техники, где их применение стало обыденным, но и экономики, например, – макроэкономике [2], маркетинге [3, 4], финансовом анализе [5, 6]. Следует отметить также устойчивый интерес к применению робастных статистических методов (в частности, М-оценок) в машинном зрении (*computer vision*) [7, 8].

Метод наименьших модулей, предложенный и использованный Р.Дж. Босковичем (R.J. Boscovich) в 1757 г. является, по-видимому, исторически первой робастной процедурой, появившейся, кстати, на 50 лет раньше метода наименьших квадратов (МНК) – самого популярного, хотя и неустойчивого, метода оценивания. В экономике и финансах метод наименьших модулей является старейшей и наиболее распространенной робастной альтернативой МНК – В. Шарп (W. Sharpe) применял его для анализа рынка ценных бумаг еще в 1971 г. [9]. Процедуры оценивания, основанные на норме L_1, обладают хорошими робастными свойствами [10], но сложны для исследования и вычисления по сравнению с МНК. В данной работе предлагается использовать знаковую функцию в качестве меточной, что характерно для оптимизационных критериев по норме L_1.

Параметры масштаба случайного сигнала приходится оценивать наряду с параметрами сдвига при применении М-оценок параметров положения. Эта проблема возникает, например, при обработке сигнала в большинстве процедур машинного зрения [11]. В данной работе предполагается, что среднее и дисперсия меняются с течением времени и искомые функции допускают разложение по некоторым заданным ортогональным системам функций, так что задача сводится к оцениванию параметров этого разложения, что является обычной постановкой в параметрическом анализе временных рядов [12].

1. Постановка задачи

Будем рассматривать следующую модель наблюдений

$$x_i = \sum_{k=0}^{s} a_k \psi_k(i/N) + n_i \exp[\sum_{k=0}^{m} \alpha_k \phi_k(i/N)], \; i = \overline{1,N},$$

где n_i – независимые одинаково распределенные случайные величины с плотностью $p(\cdot)$, $\{\psi_k(\cdot), k=\overline{0,s}\}$ и $\{\phi_k(\cdot), k=\overline{0,m}\}$ – системы ортонормированных на [0,1] полиномов порядка от нуля до s и m соответственно, причем полиномы $\{\psi_k(\cdot), k=\overline{0,s}\}$ ортонормированны с весом $\exp^{-2}[\sum_{k=0}^{m}\alpha_k\phi_k(x)]$, a_k и α_k – параметры, подлежащие оцениванию. Экспоненциальное представление тренда дисперсии вызвано удобством последующих вычислений.

Оценки параметров трендов среднего и дисперсии соответственно $\hat{a}_k$, $k=\overline{0,s}$ и $\hat{\alpha}_k$, $k=\overline{0,m}$ предлагается искать из следующей системы уравнений

$$\eta_j = \sum_{i=1}^{N} \psi_j(i/N) \exp^{-1}\left[\sum_{k=0}^{m} \hat{\alpha}_k \phi_k(i/N)\right] \times$$
$$\times \operatorname{sign}\left[x_i - \sum_{k=0}^{s} \hat{a}_k \psi_k(i/N)\right] = 0, \; j = \overline{0,s}; \qquad (1)$$

$$\eta_j = \sum_{i=1}^{N} \phi_{j-s-1}(i/N) \times$$
$$\times \left\{ \operatorname{sign}\begin{bmatrix} x_i - \sum_{k=0}^{s} \hat{a}_k \psi_k(i/N) - \\ -\exp[\sum_{k=0}^{m} \hat{\alpha}_k \phi_k(i/N)] \end{bmatrix} + 1/2 \right\} =$$
$$= 0, \; j = \overline{s+1, s+m+1},$$

где знаковая функция $\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} -1, \, x<0; \\ 0, \, x=0; \\ 1, \, x>0. \end{cases}$ Использование знаковой функции в силу ее ограниченности обеспечивает устойчивость оценок к «загрязнению» наблюдений, но, с другой стороны, затрудняет исследование их свойств, вследствие ее не дифференцируемости в нуле.

Исследуем асимптотические свойства оценок при неограниченном возрастании числа наблюдений, пользуясь методикой, примененной в работе [13].

2. Сходимость оценок почти наверное

Прежде всего, покажем сходимость оценок к истинным значениям параметров. Докажем вспомогательный результат.

Лемма. Пусть $\{y_n\}$ – последовательность функций $R^k \to R^k$, которая поточечно сходится к функции y, причем существует единственная точка x_0: $y(x_0)=0$, и якобиан $\det P(\cdot) = \det\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}(\cdot); \, i,j=\overline{1,k}\right)$ преобразования $y(\cdot)$ не вырожден в этой точке. Тогда последовательность $\{x_n\}$ такая, что $y_n(x_n)=0$, сходится к x_0.

Доказательство. Заметим, что $\|y(x_0)-y_n(x_n)\|\to 0$, поскольку $y_n(x_0)\to y(x_0)=0$, и $y_n(x_n)=0$.

Рассмотрим окрестность S точки x_0, в которой функция y непрерывна – т. к. $y(x)$ имеет единственный нуль в S и $\det P(x_0)\neq 0$, то существует некоторая окрестность $S'\subset S$, в которой функция y строго монотонна.

Для любых точек s_1, $s_2\in S'$ для $\forall\varepsilon'>0\exists\delta>0$:$\|y(s_1)-y(s_2)\|<\delta\Rightarrow\|s_1-s_2\|<\varepsilon'$; с другой стороны, в силу сходимости последовательности функций для $\forall\varepsilon>0\exists N$:$n>N$:$\|y_n(s_1)-y(s_1)\|<\varepsilon\wedge\|y_n(s_2)-y(s_2)\|<\varepsilon$. Заметим, что для $\forall n>N$

$$\|y(s_1)-y(s_2)\| \le \|y_n(s_1)-y(s_1)\| + \|y_n(s_2)-y(s_2)\| +$$
$$+\|y_n(s_1)-y_n(s_2)\| < 2\varepsilon + \|y_n(s_1)-y_n(s_2)\|.$$

Возьмем $\varepsilon<\delta/4$, тогда из условия $\|y_n(s_1)-y_n(s_2)\|<\delta/2$ будет следовать $\|s_1-s_2\|<\varepsilon'$ Таким образом, для любых s_1, $s_2\in S'$ и для любого ε_0 существует δ_0 такое, что из условия $\|y_n(s_1)-y_n(s_2)\|<\delta_0$ при достаточно больших номерах n следует $\|s_1-s_2\|<\varepsilon_0$.

Итак, из сходимости $\|y(x_0)-y_n(x_n)\|\to 0$ будет следовать сходимость $\|x_0-x_n\|\to 0$. Лемма доказана.

Введем векторные обозначения

$$\vec{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix}\alpha_0\\ \vdots \\ \alpha_m\end{pmatrix}, \hat{\vec{\boldsymbol{\alpha}}} = \begin{pmatrix}\hat{\alpha}_0\\ \vdots \\ \hat{\alpha}_m\end{pmatrix}, \vec{\boldsymbol{a}} = \begin{pmatrix}a_0\\ \vdots \\ a_s\end{pmatrix}, \hat{\vec{\boldsymbol{a}}} = \begin{pmatrix}\hat{a}_0\\ \vdots \\ \hat{a}_s\end{pmatrix}, \vec{\boldsymbol{\psi}}(\cdot) = \begin{pmatrix}\psi_0(\cdot)\\ \vdots \\ \psi_s(\cdot)\end{pmatrix}.$$

Теорема 1. Пусть плотность распределения вероятностей $p(\cdot)$ симметрична относительно 0 и $\int_0^1 p(x)dx = 1/4$, причем $p(0)\neq 0$, $p(1)\neq 0$, и $p(\cdot)$ непрерывна в точках $x=0$ и $x=1$. Тогда оценки $\hat{\vec{\boldsymbol{\alpha}}}$ и $\hat{\vec{\boldsymbol{a}}}$ сильно состоятельны.

Доказательство. Рассмотрим систему (1). Найдем

$$G_j(\hat{\vec{\boldsymbol{\alpha}}}, \hat{\vec{\boldsymbol{a}}}) = \lim_{N\to\infty} M(\eta_j)/N =$$
$$= -2\int_0^1 \psi_j(x) \exp^{-1}[\sum_{k=0}^{m} \hat{\alpha}_k \phi_k(x)] \int_0^{u_1(x)} p(t)\,dt\,dx, \;\; j=\overline{0,s};$$

$$G_j(\hat{\vec{\boldsymbol{\alpha}}}, \hat{\vec{\boldsymbol{a}}}) = \lim_{N\to\infty} M(\eta_j)/N =$$
$$= \int_0^1 \phi_{j-s-1}(x)[-2\int_0^{u_2(x)} p(t)dt + 1/2]dx, \;\; j=\overline{s+1, s+m+1},$$

где

$$u_1(x) = \sum_{k=0}^{s} \Delta a_k \psi_k(x) \exp^{-1}\left[\sum_{k=0}^{m} \alpha_k \phi_k(x)\right],$$
$$u_2(x) = \left[\sum_{k=0}^{s} \Delta a_k \psi_k(x) + \exp\left[\sum_{k=0}^{m} \hat{\alpha}_k \phi_k(x)\right]\right] \times$$
$$\times \exp^{-1}\left[\sum_{k=0}^{m} \alpha_k \phi_k(x)\right], \quad \Delta a_k = \hat{a}_k - a_k.$$

Сходимость почти наверное η_j/N к G_j при $N\to\infty$ следует непосредственно из усиленного закона больших чисел.

Покажем, что система

$$G_j(\hat{\vec{\alpha}}, \hat{\vec{a}}) = 0, \quad j = \overline{0,s} \qquad (2)$$

имеет единственное решение $\hat{\vec{a}}=\vec{a}$ при любых значениях $\hat{\vec{\alpha}}$ и $\vec{\alpha}$.

Действительно, функция $g(x)=\int_0^x p(t)dt$ обращается в нуль только в точке $x=0$, поскольку она монотонна в силу неотрицательности плотности и строго монотонна в некоторой окрестности точки $x=0$ в силу непрерывности плотности в этой точке, и $p(0)\neq 0$. Согласно системе (2) функция $g(u_1(x))$ должна быть ортогональна с положительным весом $\exp^{-1}[\sum_{k=0}^{m}\hat{\alpha}_k\phi_k(x)]$ системе полиномов $\{\psi_k(\cdot),\ k=\overline{0,s}\}$, следовательно, она должна иметь не менее $s+1$-го нуля на [0,1] [14]. С другой стороны, уравнение $u_1(x)=0$ имеет не более s корней, т. к. $\sum_{k=0}^{s}\Delta a_k\psi_k(x)$ является полиномом не более чем s-го порядка и $\exp^{-1}[\sum_{k=0}^{m}\alpha_k\phi_k(x)]>0$. Отсюда следует, что для удовлетворения системы (2) необходимо потребовать $\sum_{k=0}^{s}\Delta a_k\psi_k(x)\equiv 0$, т. е. $\Delta a_k=0$, $k=\overline{0,s}$.

Аналогично показывается, что система

$$G_j(\hat{\vec{\alpha}}, \hat{\vec{a}}) = 0, \quad j = \overline{s+1, s+m+1} \qquad (3)$$

также имеет единственное решение $\hat{\vec{\alpha}}=\vec{\alpha}$ при $\hat{\vec{a}}=\vec{a}$. В этом случае $u_2(x)=\exp[\sum_{k=0}^{m}\Delta\hat{\alpha}_k\phi_k(x)]$, $\Delta\alpha_k=\hat{\alpha}_k-\alpha_k$, и функция $f(x)=-2\int_0^x p(t)dt+1/2$ обращается в нуль только в точке $x=1$.

Найдем матрицу производных преобразования, задаваемого системами (2) и (3):

$$\left.\frac{\partial G_j(\hat{\vec{\alpha}}, \hat{\vec{a}})}{\partial \hat{a}_k}\right|_{\hat{\vec{a}}=\vec{a},\hat{\vec{\alpha}}=\vec{\alpha}} =$$

$$= -2p(0)\int_0^1 \psi_k(x)\psi_j(x)\exp^{-2}[\sum_{k=0}^{m}\alpha_k\phi_k(x)]dx =$$

$$= -2p(0)\delta_{jk},$$

$$j,k=\overline{0,s};$$

$$\left.\frac{\partial G_j(\hat{\vec{\alpha}}, \hat{\vec{a}})}{\partial \hat{\alpha}_k}\right|_{\hat{\vec{a}}=\vec{a},\hat{\vec{\alpha}}=\vec{\alpha}} = 0, \quad j=\overline{0,s}, \quad k=\overline{0,m};$$

$$\left.\frac{\partial G_j(\hat{\vec{\alpha}}, \hat{\vec{a}})}{\partial \hat{a}_k}\right|_{\hat{\vec{a}}=\vec{a},\hat{\vec{\alpha}}=\vec{\alpha}} =$$

$$= -2p(1)\int_0^1 \psi_k(x)\phi_{j-s-1}(x)\exp^{-1}\left[\sum_{k=0}^{m}\alpha_k\phi_k(x)\right]dx,$$

$$j=\overline{s+1,s+m+1}, \quad k=\overline{0,s};$$

$$\left.\frac{\partial G_j(\hat{\vec{\alpha}}, \hat{\vec{a}})}{\partial \hat{\alpha}_k}\right|_{\hat{\vec{a}}=\vec{a},\hat{\vec{\alpha}}=\vec{\alpha}} = -2p(1)\delta_{j-s-1k},$$

$$j=\overline{s+1,s+m+1}, \quad k=\overline{0,m},$$

где $\delta_{jk} = \begin{cases} 0, k\neq j, \\ 1, k=j. \end{cases}$

Привлекая лемму, получаем требуемый результат.

3. Асимптотическая нормальность оценок

Найдем асимптотическое распределение оценок $\hat{\vec{\alpha}}$ и $\hat{\vec{a}}$.

Теорема 2. В условиях теоремы 1 случайные векторы $\sqrt{N}\Delta\vec{a}$ и $\sqrt{N}\Delta\vec{\alpha}$ имеют при $N\to\infty$ нормальное распределение с нулевым средним и ковариационными матрицами соответственно $\mathbf{I}/(4p^2(0))$ и $\dfrac{3/4\mathbf{I}+p(1)/p(0)\mathbf{B}\mathbf{B}^T(p(1)/p(0)-1)}{4p^2(1)}$, где $\mathbf{I}$ – единичная матрица соответствующей размерности, матрица

$$\mathbf{B} = \left\{ \begin{array}{l} b_{jk} = \int_0^1 \phi_{j-s-1}(x)\psi_k(x)\exp^{-1}\left(\sum_{k=0}^{m}\alpha_k\phi_k(x)\right)dx, \\ j=\overline{s+1,s+m+1},\ k=\overline{0,s} \end{array} \right\}.$$

Доказательство. Рассмотрим случайные величины

$$\eta_j^{(N)}(\vec{c}) = N^{-1/2}\sum_{i=1}^{N}\psi_j(i/N)\exp^{-1}[\sum_{k=0}^{m}\alpha_k\phi_k(i/N)]\times$$

$$\times\mathrm{sign}[n_i - \sum_{k=0}^{s}N^{-1/2}c_k\psi_k(i/N)\exp^{-1}[\sum_{k=0}^{m}\alpha_k\phi_k(x)]],$$

$$j=\overline{0,s},$$

где $\vec{c}=(c_0,\ldots,c_s)^T$ – некоторый вектор параметров. Заметим, что $\eta_j^{(N)}(N^{1/2}\Delta\vec{a})=N^{-1/2}\eta_j(\hat{\vec{\alpha}},\hat{\vec{\alpha}})$.

Обозначим

$$v(i/N) = N^{-1/2}\vec{c}^{\,T}\vec{\boldsymbol{\psi}}(i/N)\exp^{-1}[\sum_{k=0}^{m}\alpha_k\phi_k(i/N)].$$

Найдем

$$\lim_{N\to\infty} M(\eta_j^{(N)}(\vec{c})) = -2\lim_{N\to\infty} N^{-1}\times$$

$$\times\sum_{i=1}^{N}\psi_j(i/N)\exp^{-1}[\sum_{k=0}^{m}\alpha_k\phi_k(i/N)]N^{1/2}\int_0^{v(i/N)}p(x)dx =$$

$$= -2p(0)\sum_{k=0}^{s}c_k\int_0^1\psi_j(x)\psi_k(x)\exp^{-2}\left(\sum_{k=0}^{m}\alpha_k\phi_k(x)\right)dx =$$

$$= -2p(0)c_j,$$

$$\lim_{N\to\infty}\mathrm{cov}(\eta_j^{(N)}(\vec{c}),\eta_k^{(N)}(\vec{c})) =$$

$$= \int_0^1\psi_j(x)\psi_k(x)\exp^{-2}\left(\sum_{k=0}^{m}\alpha_k\phi_k(x)\right)dx = \delta_{jk}.$$

Таким образом, $\eta_j^{(N)}(\vec{c})$ сходится в среднеквадратическом при $N\to\infty$ к случайной величине $\eta_j^{(N)}(\vec{c})=-2p(0)c_j+\varsigma_j$, где $M(\varsigma_j)=0$, $\mathrm{cov}(\varsigma_j,\varsigma_i)=\delta_{ij}$, причем распределение вектора $\vec{\boldsymbol{\varsigma}}=(\varsigma_0,\ldots,\varsigma_s)^T$ совпадает с асимптотическим распределением вектора $\boldsymbol{\eta}^{(N)}(\vec{0})=(\eta_0^{(N)}(\vec{0}),\ldots,\eta_s^{(N)}(\vec{0}))^T$.

Найдем предельное распределение вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{\eta}^{(N)}}(\vec{\boldsymbol{0}})$. Для любого действительного вектора $\vec{\boldsymbol{t}}=(t_0,...,t_s)^T$ сумма

$$\vec{\boldsymbol{t}}^T\overrightarrow{\boldsymbol{\eta}^{(N)}}(\vec{\boldsymbol{0}}) =$$
$$= N^{-1/2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=0}^{s} t_k\psi_k(i/N)\exp^{-1}[\sum_{k=0}^{m}\alpha_k\phi_k(i/N)]\mathrm{sign}(n_i)$$

по центральной предельной теореме имеет при $N\to\infty$ нормальное распределение, следовательно [15], вектор $\vec{\boldsymbol{\varsigma}}$ распределен нормально.

Если последовательность векторов $\vec{\boldsymbol{c}}_N$ удовлетворяет $\vec{\boldsymbol{\eta}}^{(N)}(\vec{\boldsymbol{c}}_N)=0$, то нетрудно показать, аналогично лемме, что $\|\vec{\boldsymbol{c}}_N-\vec{\boldsymbol{c}}^*\|\to 0$ по вероятности, где $\vec{\boldsymbol{c}}^*$ удовлетворяет $\vec{\boldsymbol{\eta}}(\vec{\boldsymbol{c}}^*)=0$. Таким образом, асимптотическое распределение вектора $\vec{\boldsymbol{c}}_N=\sqrt{N}\overrightarrow{\Delta\boldsymbol{a}}$ совпадает с распределением вектора $\vec{\boldsymbol{\varsigma}}/(2p(0))$.

Аналогично рассмотрим

$$\eta_j^{(N)}(\vec{\boldsymbol{c}},\vec{\boldsymbol{d}}) = N^{-1/2}\sum_{i=1}^{N}\phi_{j-s-1}(i/N)\times$$
$$\times\left\{\mathrm{sign}\left[n_i - N^{-1/2}\sum_{k=0}^{s}c_k\psi_k(i/N)\exp^{-1}\left(\sum_{k=0}^{m}\alpha_k\phi_k(x)\right)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\exp\left[N^{-1/2}\sum_{k=0}^{m}d_k\phi_k(i/N)\right]\right]+1/2\right\} =$$
$$= 0,\ j=\overline{s+1,s+m+1},$$

где $\vec{\boldsymbol{d}}=(d_0,...,d_m)^T$ – некоторый вектор параметров, $\eta_j^{(N)}(N^{1/2}\overrightarrow{\Delta\boldsymbol{a}},N^{1/2}\overrightarrow{\Delta\boldsymbol{\alpha}})=N^{-1/2}\eta_j(\hat{\vec{\boldsymbol{\alpha}}},\hat{\vec{\boldsymbol{a}}})$. Раскрывая неопределенность, имеем

$$\lim_{N\to\infty}M(\eta_j^{(N)}(\vec{\boldsymbol{c}},\vec{\boldsymbol{d}})) =$$
$$= -2p(1)\int_0^1\phi_{j-s-1}(x)\left[\begin{array}{l}\sum_{k=0}^{s}c_k\psi_k(x)\exp^{-1}\left(\sum_{k=0}^{m}\alpha_k\phi_k(x)\right)+\\ +\sum_{k=0}^{m}d_k\phi_k(x)\end{array}\right]dx,$$
$$\lim_{N\to\infty}\mathrm{cov}(\eta_j^{(N)}(\vec{\boldsymbol{c}},\vec{\boldsymbol{d}}),\eta_k^{(N)}(\vec{\boldsymbol{c}},\vec{\boldsymbol{d}})) =$$
$$= \int_0^1\phi_{j-s-1}(x)\phi_{k-s-1}(x)dx = \delta_{jk}.$$

Аналогично предыдущему, получаем, что в асимптотике вектор $\sqrt{N}\overrightarrow{\Delta\boldsymbol{\alpha}}$ распределен также, как и вектор $\dfrac{\overrightarrow{\boldsymbol{\eta}^{(N)}(\vec{\boldsymbol{0}},\vec{\boldsymbol{0}})}}{2p(1)}-\sqrt{N}\mathbf{B}\overrightarrow{\Delta\boldsymbol{a}}$, т. е. имеет гауссовское распределение с нулевым средним. Найдем ковариационную матрицу этого распределения, учитывая, что

$$M[\mathrm{sign}(n_i)\mathrm{sign}(n_j)] = \delta_{ij},$$
$$M[(\mathrm{sign}(n_i-1)+1/2)(\mathrm{sign}(n_j-1)+1/2)] = 3/4\,\delta_{ij},$$
$$M[(\mathrm{sign}(n_i-1)+1/2)\mathrm{sign}(n_j)] = 1/2\,\delta_{ij}.$$

Получаем

$$\lim_{N\to\infty}M\left[\frac{\overrightarrow{\boldsymbol{\eta}^{(N)}(\vec{\boldsymbol{0}},\vec{\boldsymbol{0}})}}{2p(1)}-\mathbf{B}\frac{\overrightarrow{\boldsymbol{\eta}^{(N)}(\vec{\boldsymbol{0}})}}{2p(0)}\right]\times$$
$$\times\left[\frac{\overrightarrow{\boldsymbol{\eta}^{(N)}(\vec{\boldsymbol{0}},\vec{\boldsymbol{0}})}}{2p(1)}-\mathbf{B}\frac{\overrightarrow{\boldsymbol{\eta}^{(N)}(\vec{\boldsymbol{0}})}}{2p(0)}\right]^T =$$
$$= \frac{3/4\mathbf{I}+p(1)/p(0)\mathbf{B}\mathbf{B}^T\left(p(1)/p(0)-1\right)}{4p^2(1)},$$

что и требовалось показать. Теорема 2 доказана.

Замечание. Требование симметричности распределения шумов, вообще говоря, не является обязательным, необходимо только фиксировать квартили распределения $Q_1=-1$, $Q_2=0$, $Q_3=1$.

Выбор весовых функций перед sign(·) в системе (1) вызван стремлением повысить асимптотическую точность оценивания. Покажем это для оценок параметров тренда среднего. Рассмотрим следующую систему, определяющую оценки $\hat{\vec{\boldsymbol{a}}}^{(b)}=(\hat{a}_k^{(b)},\ k=\overline{0,s})$:

$$\eta_j^{(b)} = \sum_{i=1}^{N}b_j(i/N)\mathrm{sign}[x_i-\sum_{k=0}^{s}\hat{a}_k^{(b)}\psi_k(i/N)] = 0,$$
$$j=\overline{0,s},$$

причем весовые функции $b_j(\cdot)$ таковы, что решение системы

$$\int_0^1 b_j(x)\int_0^{u_1(x)}p(t)dtdx = 0,\quad j=\overline{0,s},$$
$$u_1(x) = \sum_{k=0}^{s}\Delta a_k^{(b)}\psi_k(x)\exp^{-1}[\sum_{k=0}^{m}\alpha_k\phi_k(x)]$$

относительно $\vec{\boldsymbol{a}}^{(b)}$ единственно в условиях теоремы 1 – это обеспечивает сходимость почти наверное рассматриваемых оценок к $\vec{\boldsymbol{a}}$. Ковариационная матрица асимптотического распределения оценок $\hat{\vec{\boldsymbol{a}}}^{(b)}$ будет иметь вид $\dfrac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1T}}{4p^2(0)}$, где матрицы

$$\mathbf{A} = \left\{\begin{array}{l}a_{jk} = \int_0^1 b_j(x)\psi_k(x)\exp^{-1}\left(\sum_{k=0}^{m}\alpha_k\phi_k(x)\right)dx,\\ j,k=\overline{0,s}\end{array}\right\},$$
$$\mathbf{D} = \{d_{jk} = \int_0^1 b_j(x)b_k(x)dx,\quad j,k=\overline{0,s}\}.$$

Решая задачу минимизации Sp($\mathbf{A}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1T}$) по вектору $\vec{\boldsymbol{b}}(x)=(b_0(x),...,b_s(x))^T$, получаем

$$\vec{\boldsymbol{b}}(x) = \vec{\boldsymbol{\psi}}(x)\exp^{-1}\left(\sum_{k=0}^{m}\alpha_k\phi_k(x)\right),$$

но, т. к. истинные значения параметров тренда дисперсии $\vec{\boldsymbol{\alpha}}$ неизвестны, а оценки $\hat{\vec{\boldsymbol{\alpha}}}$ сильно состоятельны, то следует положить

$$\vec{\boldsymbol{b}}(x) = \vec{\boldsymbol{\psi}}(x)\exp^{-1}\left(\sum_{k=0}^{m}\hat{\alpha}_k\phi_k(x)\right),$$

что и сделано в системе (1).

Разрывность меточной функции в нуле создает проблемы при применении стандартных методов решения системы (1). К настоящему времени разработано много специальных алгоритмов для численного оценивания по норме L_1 [16]. В системе (1) все оцениваемые параметры присутствуют во всех уравнениях системы, что создает дополнительные трудности в ее решении. Можно упростить систему и оценивать параметры тренда среднего независимо от параметров тренда дисперсии, если исключить из весовых функций первых $(s+1)$-го уравнения $\vec{\boldsymbol{\alpha}}$, положив $\vec{\boldsymbol{b}}(x)=\vec{\boldsymbol{\psi}}(x)$.

Заметим, что тогда оценки $\vec{\boldsymbol{a}}^{(b)}$ удовлетворяют следующему критерию наименьших модулей:

$$\sum_{i=1}^{N}\left|x_i-\sum_{k=0}^{s}\hat{a}_k^{(b)}\psi_k(i/N)\right|\Rightarrow\min_{\hat{a}_k^{(b)}}.$$

В этом случае будут потери в эффективности оценивания $\vec{\boldsymbol{a}}$. Как показывают результаты расчетов, сделанные для линейных трендов среднего и дисперсии при гауссовском распределении шумов, т. е. $\psi_0(x)=\phi_0(x)=1$, $\psi_1(x)=\phi_1(x)=\sqrt{12}(x-1/2)$, $p(\cdot)=N(0,\sigma^2)$, эти потери могут достигать 30 % в диапазоне значения α_0/α_1 от –2,5 до 2,5.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Huber P.J. Robustness: Where are we now? // Student. – 1995. – V. 1. – № 2. – P. 75–86.
2. Atkinson A.C., Koopman S.J., Shephard N. Detecting shocks: outliers and breaks in time series // Journal of Econometrics. – 1997. – V. 80. – P. 387–422.
3. Franses P.H., Kloek T., Lucas A. Outlier robust analysis of longrun marketing effects for weekly scanning data // Journal of Econometrics. – 1999. – V. 89. – P. 293–315.
4. Seung-Hoon Yoo. A robust estimation of hedonic price models: least absolute deviations estimation // Applied Economics Letters. – 2001. – V. 8. – P. 55–58.
5. Franses P.H., Van Dijk D., Lucas A. Short patches of outliers, ARCH and volatility modeling // Applied Financial Economics. – 2004. – V. 14. – P. 221–231.
6. Martin R.D., Simin T. Outlier-Resistant Estimates of Beta // Financial Analysts Journal. – 2003. – V. 59. – № 5 – P. 56–69.
7. Stewart C.V. Robust Parameter Estimation in Computer Vision // SIAM Review. – 1999. – V. 41. – № 3. – P. 513–537.
8. Robust Statistical Techniques in Image Understanding. Special Issue of Comput. Vision Image Understand. – 2000. – V. 78. – 156 p.
9. Sharpe W.F. Mean-Absolute-Deviation Characteristic Lines for Securities and Portfolios // Management Science. – 1971. – V. 18. – № 2. – P. B1–B13.
10. Shevlyakov G.L., Vilchevski N.O. Robustness in Data Analysis: Criteria and Methods. (Modern Probability and Statistics Series). – Boston: Vsp International Science Publishers, 2002. – 310 p.
11. Dahyot R., Wilson S. Robust Scale Estimation for the Generalized Gaussian Probability Density Function // Metodoloski zvezki. – 2006. – V. 3. – № 1. – P. 21–37.
12. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов. – М.: Мир, 1976. – 758 с.
13. Китаева А.В. Медианные оценки параметров квадратичного тренда временного ряда // Автометрия. – 1990. – № 1. – С. 87–89.
14. Сеге Г. Ортогональные многочлены. – М.: Физматгиз, 1962. – 500 с.
15. Андерсен Т. Введение в многомерный статистический анализ. – М.: Физматгиз, 1963. – 500 с.
16. Koenker R. L1 computation: An interior monologue. In: L1-Statistical Procedures and Related Topics. (IMS Lecture Notes Monograph Series. V. 31). – Hayward, California, 1997. – P. 15–32.

Поступила 10.10.2008 г.